УДК 517.947

В. П. Бурский

О РАСШИРЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ОБЛАСТИ

Для дифференциальной операции с произвольными гладкими коэффициентами в ограниченной области с помощью техники гомологической алгебры характеризуются следы функций из области определения максимального оператора. Показано наличие корректной граничной задачи для операторов главного типа и операторов постоянной силы с аналитическими коэффициентами.

1. Напомним основные факты о расширениях дифференциального оператора и граничных задачах для дифференциальных уравнений в области (см. [1, 2]).

 ISSN 0236-0497. Нелинейн. граничн. задачи. 1993. Вып. 5.

Пусть Ω — ограниченная область с границей $\partial\Omega$, являющейся гладким $(n-1)$-мерным подмногообразием в $\mathbf{R}^n$,

$$\mathscr{L} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad D^\alpha = (-\partial)^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}, \quad \alpha \in Z_+^n,$$

$|\alpha| = \sum_k \alpha_k$ — дифференциальная операция с комплекснозначными коэффициентами из пространства $C^\infty(\bar{\Omega})$, $\mathscr{L}^+ \cdot = \sum_{|\alpha|\leqslant m} D^\alpha(a_\alpha \cdot)$ — формально сопряженная дифференциальная операция. Минимальным расширением оператора $\mathscr{L}$, или просто минимальным оператором L_0, принято называть замыкание оператора, заданного операцией $\mathscr{L}$ на пространстве $C_0^\infty(\Omega)$, в норме графика $\|u\|_L^2 = \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\mathscr{L}u\|_{L_2(\Omega)}^2$. Максимальным расширением оператора $\mathscr{L}$, или просто максимальным оператором, назовем сужение оператора, порожденного операцией $\mathscr{L}$ в $\mathscr{D}'(\Omega)$, на область определения $\mathscr{D}(L) = \{u \in L_2(\Omega) \mid \mathscr{L}u \in L_2(\Omega)\}$, $L = \mathscr{L}|_{\mathscr{D}(L)}$. Заметим, что пространство $\mathscr{D}(L)$ — гильбертово, как и его замкнутое подпространство; $\mathscr{D}(L_0)$ — область определения оператора L_0. Ядро $\ker L$ замкнуто в $\mathscr{D}(L)$ и в $L_2(\Omega)$, ядро $\ker L_0$ замкнуто в $\mathscr{D}(L)$ и в $\ker L$. Рассмотрим еще одно расширение оператора $\mathscr{L}|_{C^\infty(\bar{\Omega})}$, обозначаемое $\tilde{L}$ с областью определения $\mathscr{D}(\tilde{L})$, являющейся замыканием пространства $C^\infty(\bar{\Omega})$ в норме графика $\|u\|_L$.

Рассмотрим следующие условия:

$$\tilde{L} = (L_0^+)^*; \tag{1}$$

$$\tilde{L}^+ = (L_0)^*; \tag{2}$$

оператор $L_0 : \mathscr{D}(L_0) \to L_2(\Omega)$ имеет непрерывный левый обратный; (3)

оператор $L_0^+ : \mathscr{D}(L_0^+) \to L_2(\Omega)$ имеет непрерывный левый обратный. (4)

Хорошо известно, что $L = (L_0^+)^*$ и $L^+ = (L_0)^*$, так что условия (1), (2) означают, что $\mathscr{D}(L) = \mathscr{D}(\tilde{L})$, $\mathscr{D}(L^+) = \mathscr{D}(\tilde{L}^+)$, т. е. возможность приблизить в норме графика каждую функцию из $\mathscr{D}(L)$ функциями из $C^\infty(\bar{\Omega})$. Условия (3), (4) влекут соответственно условия $\ker L_0 = \{0\}$, $\ker L_0^+ = \{0\}$. Условия (1), (2), (3), (4) введены в связи с изучением понятия корректной граничной задачи, которое мы также здесь напомним [2].

Пространство Коши $C(L)$ определим как фактор $\mathscr{D}(L)/\mathscr{D}(L_0)$. Линейной однородной граничной задачей называется задача нахождения решения u уравнений

$$Lu = f, \quad \Gamma u \in B, \tag{5}$$

где $\Gamma : \mathscr{D}(L) \to C(L)$ — отображение факторизации, B — линейное многообразие в $C(L)$. Граничное условие $\Gamma u \in B$ порождает подпространство $\mathscr{D}(L_B) = \Gamma^{-1}(B)$ в пространстве $\mathscr{D}(L)$ и оператор L_B, являющийся сужением оператора L на пространство $\mathscr{D}(L_B)$ и расширением оператора L_0. Граничная задача называется корректно поставленной, а оператор L_B — разрешимым расширением, если оператор $L_B : \mathscr{D}(L_B) \to L_2(\Omega)$ имеет непрерывный двусторонний обратный.

Утверждение 1. Для операторов L_0 и L_2^+ существуют разрешимые расширения тогда и только тогда, когда выполнены условия (3) и (4).

Это утверждение доказано Л. Хермандером в [2] на основании работы М. И. Вишика [3]. Ниже будет приведено это доказательство в форме, более подходящей для дальнейшего.

Далее, следуя А. А. Дезину [1], оператор разрешимого расширения L_B назовем правильным, если $\mathscr{D}(L_B) \subset \mathscr{D}(\tilde{L})$. Там же доказано

Утверждение 2. В предположениях (1), (3), (4) у оператора K_0 существует правильное расширение.

Ниже будет продемонстрировано доказательство этих утверждений в терминах гомологической алгебры, техника которой будет использована для дальнейших построений.

2. Рассмотрим также следующие условия:

$$\text{оператор } \tilde{L} : \mathscr{D}(\tilde{L}) \to L_2(\Omega) \text{ сюрьективен;} \tag{6}$$

$$\text{оператор } \tilde{L}^+ : \mathscr{D}(\tilde{L}^+) \to L_2(\Omega) \text{ сюрьективен;} \tag{7}$$

$$\text{оператор } L : \mathscr{D}(L) \to L_2(\Omega) \text{ сюрьективен;} \tag{8}$$

$$\text{оператор } L^+ : \mathscr{D}(L) \to L_2(\Omega) \text{ сюрьективен.} \tag{9}$$

Условия (1) и (4) влекут справедливость условия (6). Действительно, условие (1) означает, что $\mathscr{D}(\tilde{L}) = \mathscr{D}(L)$, а кроме того, что пространство $L_2(\Omega)$ раскладывается в ортогональную сумму пространств $\operatorname{Im}\tilde{L}$ и $\ker \tilde{L}^* = \ker L_0^+$, последнее из которых тривиально по условию (4). Аналогично, из условий (2) и (3) следует (7). Наоборот, из условия (6) следует, что $\mathscr{D}(\tilde{L}) = \mathscr{D}(L)$, а потому и условие (1); далее, в силу замкнутости подпространства $\ker \tilde{L}$, в гильбертовом пространстве $D(\tilde{L})$ имеется ортогональное дополнение E и непрерывный оператор M: $L_2(\Omega) \to \mathscr{D}(\tilde{L})$, такой, что $\tilde{L}M = 1_{L_2(\Omega)}$, $E = \operatorname{Im} M$. Применяя сопряжение, получим $M^* L_0^+ = 1_{\mathscr{D}(L_0^+)}$. Действительно, сопряженный в смысле оснащенных пространств относительно $L_2(\Omega)$ (см. [4]) оператор $M' : [D(\tilde{L})]^* \to L_2(\Omega)$ и в том же смысле сопряженный оператор $\tilde{L}' : L_2(\Omega) \to [\mathscr{D}(\tilde{L})]^*$ удовлетворяют равенству $M'\tilde{L}' = 1_{L_2(\Omega)}$. Поскольку $\tilde{L}^* = \tilde{L}'|_{E_1}$, $M^* = M'|_{E_2}$, где $E_1 = \{u \in L_2(\Omega) \mid \tilde{L}'u \in L_2(\Omega)\} = \mathscr{D}(L_0^+)$, $E_2 = [\mathscr{D}(\tilde{L})]^* \cap L_2(\Omega)$, то выполнено равенство $M^*\tilde{L}^* = 1_{\mathscr{D}(L_0^+)}$. Осталось применить равенство $\tilde{L}^* = L_0^+$. Доказано

Утверждение 3. Условия (1), (4) равносильны условию (6), условия (2), (3) равносильны условию (7).

3. Пусть теперь выполнено условие (8). Будем пользоваться языком точных последовательностей в алгебраическом смысле. При этом все операторы, включенные в диаграммы, будут непрерывными и с замкнутыми образами. Можно также сказать, что все построения ведутся в категории $\mathscr{G}$ гильбертовых пространств, морфизмами в которых являются линейные непрерывные операторы с замкнутыми образами.

Для максимального оператора тогда мы имеем точную последовательность

$$0 \to \ker L \xrightarrow{i_L} \mathscr{D}(L) \xrightarrow{L} L_2(\Omega) \to 0.$$

Имеется и аналогичная последовательность для минимального оператора, а кроме того, точная последовательность ортогонального разложения $L_2(\Omega) = \operatorname{Im} L_0 \dotplus \ker L^+$. Добавив сюда определение пространства Коши $C(L)$, получим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \ker L_0 \arrow[r, "i_{L_0}"] \arrow[d, "i_{\ker}"] & \mathscr{D}(L_0) \arrow[r, "L_0"] \arrow[d, "i_0"] & \operatorname{Im} L_0 \arrow[r] \arrow[d, "i_{\operatorname{Im}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker L \arrow[r, "i_L"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathscr{D}(L) \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\Gamma"] & L_2(\Omega) \arrow[r] \arrow[d, "s_{\operatorname{Im}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^0(L) \arrow[r, "i_C"] \arrow[d] & C(L) \arrow[r, "s_C"] \arrow[d] & \ker L^+ \arrow[r] \arrow[d] & 0, \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{10}$$

в которой еще не определен оператор s_C, если считать ясным, что $\gamma : \ker L \to \ker L / \ker L_0$ — отображение факторизации. Коммутативность верхних и левого нижнего квадратов очевидна. Опеатор s_C определим с помощью следующей конструкции:

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\Gamma"] & Lu \arrow[d, "s_{\mathrm{Im}}"] \\ g = \Gamma u = u + \mathcal{D}(L_0) & \{Lu\} = Lu + \mathrm{Im}\, L_0 \end{tikzcd} \qquad S_C g = \{Lu\}.$$

Для каждого элемента $y \in C(L) = \{u + \mathcal{D}(L_0) \mid u \in \mathcal{D}(L)\}$ находим какой-нибудь элемент $u \in \mathcal{D}(L)$ со свойством $\Gamma u = y$ и к нему применяем оператор $S_{\mathrm{Im}} \circ L$. Ясно, что результат не зависит от выбора элемента u, а построенное отображение s_C линейно. Его непрерывность следует из непрерывности оператора L. По построению правый нижний квадрат коммутативен. Таким образом, диаграмма (10) коммутативна, все столбцы и две верхние строки точны. Из алгебраической 3×3-леммы (см. [5]) получаем точность нижней строки. Доказано

Утверждение 4. Диаграмма (10), построенная при условии (8) коммутативна, ее строки и столбцы точны.

4. Напомним, что термин «точная последовательность $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\delta} C \to 0$ расщепляется» означает, что $B \approx A \oplus C$, т. е. находясь в рамках указанной выше категории, для прямой суммы мы имеем следующее определение: существуют морфизмы $\beta : B \to A$, $\rho : C \to B$ со свойствами (см. [5])

1) $\beta\alpha = 1_A$: 2) $\delta\rho = 1_C$; 3) $\alpha\beta + \rho\delta = 1_B$.

Легко видеть, что для расщепления точной последовательности $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\delta} C \to 0$ в нашей категории достаточно существования морфизма ρ, правого обратного к δ, поскольку, если принять $\beta = \alpha^{-1}(1_B - \rho\delta)$, то свойства прямой суммы будут выполнены.

Мы хотим показать теперь, что все последовательности в диаграмме (10) расщепляются согласованным образом, а именно, что диаграмма

$$0 \to (1) \to (2) \to (3) \to 0 \tag{11}$$

в категории коротких точных последовательностей, состоящая из последовательностей (1), (2), (3), представляющих соответственно первый, второй и третий столбцы диаграммы (10), расщепляется. Каждый столбец можно, очевидно, интерпретировать как ортогональную сумму в силу гильбертовости всех пространств. По этой же причине расщепляется в прямую сумму верхняя и нижняя строки диаграммы (10):

$$\mathcal{D}(L_0) \approx \ker L_0 \oplus \mathrm{Im}\, L_0, \quad C(L) = C^0(L) \oplus \ker L^+,$$

$$\hat{L}_0 : \mathrm{Im}\, L_0 \to \mathcal{D}(L_0), \quad \hat{S}_L : \ker L^+ \to C(L)$$

— непрерывные правые обратные к операторам L_0 и s_C. Теперь непрерывный правый обратный к оператору L оператор конструируем как $\hat{L} = \hat{L}_0 \oplus s_C$. Как уже указывалось, этого достаточно для расщепления. Легко проверяются необходимые свойства коммутативности в диаграмме

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 & \ker L_0 \arrow[l] \arrow[d, "i_{\ker}"] & \mathcal{D}(L_0) \arrow[l, "\hat{i}_{L_0}"'] \arrow[d, "i_0"] & \mathrm{Im}\, L_0 \arrow[l, "\hat{L}_0"'] \arrow[d, "i_{\mathrm{Im}}"] & 0 \arrow[l] \\ 0 & \ker L \arrow[l] \arrow[d, "\gamma"] & \mathcal{D}(L) \arrow[l, "\hat{i}_L"'] \arrow[d, "\Gamma"] & L_2(\Omega) \arrow[l, "\hat{L}"'] \arrow[d, "s_{\mathrm{Im}}"] & 0 \arrow[l] \\ 0 & C^0(L) \arrow[l] \arrow[d] & C(L) \arrow[l, "\hat{i}_0"'] \arrow[d] & \ker L^+ \arrow[l, "\hat{s}_C"'] \arrow[d] & 0. \arrow[l] \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd} \tag{12}$$

Мы показали, что из условия (8) следует существование расщепляющего морфизма (3), (2) для последовательности (11), правого обратного к морфизму (L_0, L, s_C) в категории коротких точных последовательностей. При этом правый обратный к L оператор $\hat{L}$ задает разрешимое сужение $L_1 = L\big|_{\operatorname{Im}\hat{L}}$ максимального оператора L. Наоборот, всякое разрешимое сужение L_1 оператора L в силу ортогонального расщепления правого столбца порождает разложения в прямую сумму $L_1^{-1} = L = \hat{L}_0 \oplus s_C$ и коммутативную диаграмму (12). Заметим, что по определению разрешимости оператор $\hat{L} = L_1^{-1}$ определен на всем $L_2(\Omega)$, т. е. выполнено условие (8). Доказано

Утверждение 5. Существование разрешимого сужения максимального оператора эквивалентно расщеплению последовательности (11) и эквивалентно условию (8).

Если теперь мы хотим, чтобы оператор L_1 был определен на $\mathscr{D}(L_0)$, т. е. чтобы L_1 был расширением минимального оператора, очевидно, нужно потребовать, чтобы $\operatorname{Im}\hat{L}_0 = \mathscr{D}(L_0)$, но тогда точность верхней строки означает, что $\ker L_0 = 0$. Заметим также, что условие (8) равносильно тому, что $\ker L_0^+ = 0$, $\operatorname{Im} L = \overline{\operatorname{Im} L}$. Доказано

Утверждение 6. Для того чтобы для уравнения $Lu = f$ существовала корректно поставленная граничная задача, необходимо и достаточно выполнения условий

$$\ker L_0 = 0, \quad \ker L_0^+ = 0, \quad \operatorname{Im} L \text{ — замкнут в } L_2(\Omega). \tag{13}$$

Замечание. Условие (3) эквивалентно, очевидно, тому, что $\ker L_0 = 0$ и $\operatorname{Im} L$ — замкнут в $L_2(\Omega)$. Поэтому условие (13) с добавленным условием $\operatorname{Im} L^+$ — замкнут в $L_2(\Omega)$ — эквивалентны условиям (3) и (4), что по утверждению 6 приводит к утверждению 1.

5. Поскольку $\ker \mathscr{L}\big|_{C_0^\infty(\Omega)} \subset \ker \mathscr{L}_0 \subset \ker \mathscr{L}\big|_{\mathscr{E}'(\overline{\Omega})}$, где $\mathscr{E}'(\overline{\Omega}) = Lu \in \mathscr{E}' \times$ $\times (R^n) \mid \operatorname{supp} u \subset \overline{\Omega}\}$, равенства

$$\ker \mathscr{L}\big|_{C_0^\infty(\Omega)} = \ker \mathscr{L}^+\big|_{C_0^\infty(\Omega)} = 0 \tag{14}$$

необходимы для выполнения (13), а равенства

$$\ker \mathscr{L}\big|_{\mathscr{E}'(\overline{\Omega})} = \ker \mathscr{L}^+\big|_{\mathscr{E}'(\overline{\Omega})} = 0, \ \operatorname{Im} L \text{ — замкнут в } L_2(\Omega) \tag{15}$$

достаточны для этого.

Теорема (13.6.15) из работы [6], принадлежащая Плису, дает пример эллиптического оператора, для которого не выполнено условие (13), и поэтому справедливо

Утверждение 7. Существует эллиптический оператор $\mathscr{L}$ четвертого порядка с C^∞-коэффициентами в $\mathbf{R}^3$, для которого не существует корректной граничной задачи.

Напомним, что дифференциальный оператор $\mathscr{L} = \mathscr{L}(x, D)$ имеет в области $\overline{\Omega}$ постоянную силу, если

$$\forall x \in \overline{\Omega}, \quad \forall y \in \overline{\Omega}, \quad \exists C > 0, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n, \quad \tilde{l}(x, \xi)/\tilde{l}(y, \xi) \leqslant C,$$

где $|\tilde{l}(x, \xi)|^2 = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} |D_\xi^\alpha \mathscr{L}(x, \xi)|^2$, а оператор с постоянными коэффициентами $P_1(D)$ слабее такого же оператора $P_2(D)$, если $\tilde{P}_1(\xi)/\tilde{P}_2(\xi) \leqslant C$. Оператор постоянной силы представляется в виде

$$\mathscr{L}(x, D) = P_0(D) + \sum_{j=1}^{N} C_j(x) P_j(D), \tag{16}$$

где $C_j \in C^\infty(\overline{\Omega})$; P_j — операторы, составляющие базис в конечномерном векторном пространстве операторов с постоянными коэффициентами, которые слабее, чем P_0. Показано (см. [6, 7]), что для операторов постоянной силы с аналитическими коэффициентами выполнено условие (15). То же справедливо для операторов вещественного главного типа вида (16). Из доказанного выше вытекают утверждения.

Утверждение 8. Оператор постоянной силы с аналитическими в $\Omega' \supset \supset \bar{\Omega}$ коэффициентами допускает корректную граничную задачу.

Утверждение 9. Оператор вещественного главного типа вида (11), где P_j — произвольные операторы степени меньшей, чем $m = \deg P_0 = \deg \mathscr{L}$, допускает корректную граничную задачу.

Отметим, что, как следует из рассуждений работы [1], при условиях утверждения 9 выполняются также условия (1), (2).

6. Рассмотрим полуторалинейную форму $[u, v] = \langle Lu, v\rangle - \langle u, L^+v\rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — спаривание, сводящееся в $L_2(\Omega)$ к скалярному произведению. Эта форма определена для всех $u \in \mathscr{D}(L), v \in \mathscr{D}(L^+)$ и для каждого $u \in \mathscr{D}(L)$ задает линейный непрерывный функционал $L_{\partial\Omega}u \in [\mathscr{D}(L^+)]^*$, который можно задать в следующем виде. Пусть для $u \in L_2(\Omega)$ символ $\theta_\Omega u$ означает продолжение функции u нулем за границу $\partial\Omega$ в $\mathbf{R}^n$. Тогда $L_{\partial\Omega}u = \theta_\Omega Lu - \mathscr{L}(\theta_\Omega u)$, где $\mathscr{L}$ действует в $\mathscr{E}'(\bar{\Omega})$, $\langle L_{\partial\Omega}u, v\rangle = [u, v]$. Легко видеть, что $\operatorname{supp} L_{\partial\Omega}u \subset \partial\Omega$, поскольку для функции u с носителем $K \subset \subset \Omega$, очевидно, $L_{\partial\Omega}u = 0$, поэтому порядок распределения $L_{\partial\Omega}u$ конечен. Точнее, $L_{\partial\Omega}u \in H^{-m}(\mathbf{R}^n)$, так как $H^m(\Omega) \subset \mathscr{D}(L^+)$, а потому $[\mathscr{D}(L^+)]^* \subset H^{-m}(\Omega)$. Нетрудно сообразить, что для $u \in \mathscr{D}(L_0)$ $L_{\partial\Omega}u = 0$, и наоборот, $L_{\partial\Omega}u = 0$ влечет $u \in \mathscr{D}(L_0)$, поэтому распределение $L_{\partial\Omega}u$, можно сказать, представляет собой элемент пространства Коши $C(L)$. При этом справедливо следующее

Утверждение 10. Пространство Коши $C(L)$ вкладывается в произведение $H^{-m+1/2}(\partial\Omega) \times \ldots \times H^{-1/2}(\partial\Omega)$, поскольку, как мы увидим, каждое распределение $L_{\partial\Omega}u$ раскладывается в сумму $L_{\partial\Omega}u = (-\nabla \cdot \nu)^{m-1} (L_{(0)}u \cdot \delta_{\partial\Omega}) + (-\nabla \cdot \nu)^{m-2}(L_{(1)}u \cdot \delta_{\partial\Omega}) + \ldots$, где ν — внешняя нормаль, распределение $W = (-\nabla \cdot \nu)^{m-1-q}(w \cdot \delta_{\partial\Omega})$ действует по формуле $\langle W, \psi\rangle = \langle w, \partial_\nu^{m-1-q}\psi\rangle_{\partial\Omega}$ для всех $\psi \in H^m(\Omega)$, а распределение $L_{(q)}u \in H^{-q+1/2}(\partial\Omega)$ для гладкого u представляет собой след действия дифференциального оператора по касательным направлениям к $\partial\Omega$ порядка q.

Доказательство получится из формулы Грина для $v \in \in H^m(\partial\Omega)$

$$[u, v] = \langle L_{\partial\Omega}u, v\rangle. \tag{17}$$

Обозначим $J_{m,q} : H_{m-q-1/2}(\partial\Omega) \to H^m(\mathbf{R}^n)$, $q = 0, 1, \ldots, m-1$ — непрерывный оператор продолжения со свойством $\partial_\nu^p (J_{m,q}\psi)|_{\partial\Omega} = \delta_q^p\psi$, $p = 0, 1, \ldots, m-1$. Подставим $v = J_{m,q}\psi \in \mathscr{D}(L^+)$ и обозначим $L_{(q)}u \in H^{-q+1/2}$ распределение, действующее по правилу $\langle L_{(q)}u, \psi\rangle = \langle L_{\partial\Omega}u, J_{m,q}\psi\rangle$. Произвольная функция $v \in H^m(\Omega)$ может быть разложена в сумму

$$v = J_{m,0}v|_{\partial\Omega} + J_{m,1}\partial_\nu v|_{\partial\Omega} + \cdots + J_{m,m-1}\partial_\nu^{m-1}v|_{\partial\Omega} + v_0,$$

где $v_0 \in H^m(\partial\Omega)$, поэтому имеет место записанное разложение распределения $L_{\partial\Omega}u$, так как $\langle L_{\partial\Omega}u, v_0\rangle = 0$. Таким образом, распределение $L_{\partial\Omega}u$ представлено набором распределений $L_{(q)}u \in H^{-q+1/2}(\partial\Omega)$, которые естественно назвать L-следами функции u. Расшифровка равенства (17) на гладких функциях $u, v \in H^m(\Omega)$ завершает доказательство.

Очевидно, что у функций из $\mathscr{D}(L_0)$ все L-следы тривиальны, и наоборот — тривиальность L-следов функции u из $\mathscr{D}(L)$ означает, что $u \in \in \mathscr{D}(L_0)$. Охарактеризуем пространство $C^0(L)$.

Утверждение 11. L-следы функции $u \in \mathscr{D}(L)$ представляют распределение $L_{\partial\Omega}u$, лежащее в пространстве $C^0(L)$, тогда и только тогда, когда для каждой функции $u \in \ker L^+$

$$\langle L_{\partial\Omega} u,\ v\rangle = 0. \tag{18}$$

Доказательство. Если $Lu = 0$ и $L^+ v = 0$, то равенство (18) выполнено. Наоборот, пусть для каждой функции $v \in \ker L^+$ выполнено равенство (18). Тогда $\langle Lu, v\rangle = 0$, т. е. $Lu \in \operatorname{Im} L_0$. Значит найдется функция $U \in \mathscr{D}(L_0)$, такая, что $L(u - U) = 0$, т. е. $u - U \in \ker L$, а поскольку $L_{\partial\Omega} U = 0$, то $L_{\partial\Omega} u \in C^0(L)$.

Заметим, что условие (18) позволило исследовать некоторые конкретные неклассические граничные задачи [8, 9, 10].

7. Рассмотрим теперь L-следы функций из $\mathscr{D}(\tilde{L})$. Они образуют подпространство $C(\tilde{L})$ пространства $C(L)$ и могут быть приближены в норме $C(L)$ L-следами гладких функций, являющихся образами дифференциальных операторов от данных Коши. Рассмотрим также пересечение $C^0(\tilde{L}) = C^0(L) \cap C(\tilde{L})$, $\ker \tilde{L} = \ker \bar{L} \cap \mathscr{D}(\tilde{L})$, $\ker \tilde{L}^+ = \ker L^+ \cap \mathscr{D}(\tilde{L}^+)$. Эти объекты образуют коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \ker L_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{D}(L_0) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Im} L_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker \tilde{L} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{D}(\tilde{L}) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Im} \tilde{L} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^0(\tilde{L}) \arrow[r] \arrow[d] & C(\tilde{L}) \arrow[r] \arrow[d] & E(L^+) \arrow[r] \arrow[d] & 0, \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{19}$$

где объект $E(L^+)$ замыкает диаграмму до коммутативной.

Обозначим через (L_0) первую строку диаграмм (10) и (19), (L) и (C) — вторую и третью строки диаграммы (10), а $(\tilde{L})$ и $(\tilde{C})$ — вторую и третью строки диаграммы (19). Все они являются объектами категории $\mathscr{S}_1$ коротких точных последовательностей категории $\mathscr{S}$ и образуют в силу диаграмм (10) и (19) точные последовательности в категории $\mathscr{S}_1$

$$0 \to (L_0) \to (L) \to (C) \to 0; \tag{20}$$

$$0 \to (L_0) \to (\tilde{L}) \to (\tilde{C}) \to 0. \tag{21}$$

Заметим, что $0 \to (\tilde{L}) \to (L)$, $0 \to (\tilde{C}) \to (C)$, поэтому получаем диаграмму в категории $\mathscr{S}_1$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & (L_0) \arrow[r] \arrow[d] & (L_0) \arrow[rr] \arrow[d] & & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & (\tilde{L}) \arrow[r] \arrow[d] & (L) \arrow[r] \arrow[d] & (\operatorname{sing} L) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & (\tilde{C}) \arrow[r] \arrow[d] & (C) \arrow[r] \arrow[d] & (\operatorname{sing} C) \arrow[r] \arrow[d] & 0. \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Здесь короткая точная последовательность (sing) является результатом факторизации последовательности (20) по последовательности (21) в категории $\mathscr{S}_2$ коротких точных последовательностей объектов из $\mathscr{S}_1$ или диаграмм из $\mathscr{S}$. При этом $(\operatorname{sing} L)$ в категории $\mathscr{S}_1$ — это нижняя строка диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \ker \tilde{L} & \longrightarrow & \mathscr{D}(\tilde{L}) & \longrightarrow & \operatorname{Im}(\tilde{L}) & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \ker L & \longrightarrow & \mathscr{D}(L) & \longrightarrow & L_2(\Omega) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & \operatorname{sing}\ker L & \rightarrow & \operatorname{sing}\mathscr{D}(L) & \rightarrow & \operatorname{sing}\operatorname{Im} L & \rightarrow & 0, \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

а (sing C) — нижняя строка диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C^0(\tilde{L}) & \longrightarrow & C(\tilde{L}) & \longrightarrow & E(L^+) & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C^0(L) & \longrightarrow & C(L) & \longrightarrow & \ker L^+ & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & \operatorname{sing} C^0(L) & \rightarrow & \operatorname{sing} C(L) & \rightarrow & \operatorname{sing}\ker L^+ & \rightarrow & 0. \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

В утверждении 10 отмечался смысл $C(L)$ как набора распределений $L_{(q)}u \in H^{-q+1/2}(\partial\Omega)$ и смысл $C(\tilde{L})$ как того же набора, но при этом $L_{(q)}u$ не просто обозначение, а действие дифференциального оператора $L_{(q)}$ с гладкими коэффициентами на $u \in \mathscr{D}(\tilde{L})$, и это действ е не зависит от способа приближения $u_n \to u$ гладкими u_n. Это последнее утверждение легко следует из формулы Грина (17). Из всего этого ясен смысл элементов из $\operatorname{sing} C(L) = C(L)/C(\tilde{L})$. При выполнении условий (13), как видно, препятствие к тому, чтобы каждое разрешимое расширение было правильным оператором, лежит в $\operatorname{sing}\operatorname{Im} L$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & \operatorname{sing}\ker L & \rightarrow & \operatorname{sing}\mathscr{D}(L) & \rightarrow & \operatorname{sing}\operatorname{Im} L & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & \operatorname{sing} C^0(L) & \rightarrow & \operatorname{sing} C(L) & \rightarrow & \operatorname{sing}\ker L^+ & \rightarrow & 0. \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Утверждение 12. В предположениях (8) $L = \tilde{L}$ эквивалентно тому, что $\operatorname{sing}\ker L = \operatorname{sing}\ker L^+ = 0$.

1. *Дезин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач.— М. : Наука, 1980.— 208 с.
2. *Хермандер Л.* К теории общих дифференциальных операторов в частных производных.— М. : Изд-во иностр. лит., 1959.— 131 с.
3. *Вишик М. И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Тр. Моск. мат. об-ва.— 1952.— № 1.— С. 187—246.
4. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 732 с.
5. *Маклейн С.* Гомология.— М. : Мир, 1966.— 543 с.
6. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 т.— М. : Мир, 1986.— Т. 2.— 456 с.
7. *Gudmundsdottir G.* Global properties of differential operators of constant strengh // Ark. Mat.— 1977.— 15.— P. 169—198.
8. *Бурский В. П.* Единственность решения задачи Дирихле в шаре для волнового уравнения // Дифференц. уравнения.— 1988.— 24, № 6.— С. 1038—1039.
9. *Бурский В. П.* Краевые задачи для гиперболического уравнения второго порядка в круге // Изв. вузов. Математика.— 1987.— № 2.— С. 22—29.
10. *Бурский В. П.* О нарушении единственности решения задачи Дирихле для эллиптических систем в круге // Мат. заметки.— 1990.— 48, № 3.— С. 32—36.

Ин-т прикл. математики
и механики АН Украины, Донецк

Получено 20.12.91